- สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับสอง

$2^{nd}$ ODEs

- ✓ Linear eq.

  $$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = f(x)$$

  $$y'' + P(x)y' + q(x)y = r(x)$$

  - ✓ Homogeneous eq.

    $r(x) = 0$

    $$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$$

    - ✓ with constant coefficient

      สัมประสิทธิ์ หน้า $y''$, $y'$, $y$ เป็นค่าคงที่

    - ✓ Variable coefficient

      ⇓

      $f(x) \Rightarrow$ เป็นฟังก์ชันของ $x$

  - ✓ Non-Homogeneous eq.

    $r(x) \neq 0$

    - ✓ constant coef.
    - ✓ Variable coef.

- Non-Linear eq. ×

จงพิจารณา สมการ เชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ ว่าเป็น แบบใด

1. $y'' + 3xy' + x^3y^2 = e^x$

$\Rightarrow$ Non-Linear eq.

2. $(\sin x)y'' + (\cos x)y' + \tan\sqrt{x} = 0$

$\Rightarrow$ Linear eq.

$\Rightarrow$ Non-Homogeneous eq.

$\Rightarrow$ Variable coefficient

3. $y'' + 3xy' + x^3y = 0$

$\Rightarrow$ Linear eq.

$\Rightarrow$ Homogeneous eq.

$\Rightarrow$ Variable coef.

4. $y'' + 3y' + 5y = 0$

$\Rightarrow$ Linear eq.

$\Rightarrow$ Homogeneous eq.

$\Rightarrow$ Constant coefficient.

• สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง < Linear, Homogeneous, constant coefficient

$$ay'' + by' + cy = 0$$

โดยที่ $a, b, c$ เป็นค่าคงที่

ให้เริ่มพิจารณา จาก สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$y' - \lambda y = 0 \quad ; \quad \lambda = \text{ค่าคงที่}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \lambda\,dx$$

$$\ln y = \lambda x + c$$

$$e^{\ln y} = e^{\lambda x + c}$$

$$y = e^{\lambda x} \cdot e^{c} \quad ; \quad e^{c} = c_1$$

$$y = c_1 e^{\lambda x}$$

หา $y'$ และ $y''$ ของ ผลเฉลย แล้วนำไปแทนในสมการตั้งต้น

$$y' = c_1 e^{\lambda x} \cdot \lambda = c_1 \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = c_1 \lambda^2 e^{\lambda x}$$

สมการตั้งต้น $\Rightarrow$ $ay'' + by' + cy = 0$

$$a[c_1 \lambda^2 e^{\lambda x}] + b[c_1 \lambda e^{\lambda x}] + c \cdot c_1 e^{\lambda x} = 0$$

$$c_1 e^{\lambda x}\left[a\lambda^2 + b\lambda + c\right] = 0$$

เทอม $\quad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow$ characteristic eq.

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ผลเฉลย ของสมการ $\quad ay'' + by' + cy = 0$

คือ $\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

พิจารณา ผลเฉลย ของ สมการ

| | |
|---|---|
| ① $b^2 - 4ac > 0$ | ① $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ |
| ② $b^2 - 4ac = 0$<br>$\lambda_1 = \lambda_2$ | ② $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$ |
| ③ $b^2 - 4ac < 0$<br>$\lambda_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} i$<br>$\lambda_1 = r + si$<br>$\lambda_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} i$<br>$\lambda_2 = r - si$ | ③ $y = e^{rx}\left[c_1\cos(sx) + c_2\sin(sx)\right]$<br>$r$ = Real part $\Rightarrow -\frac{b}{2a}$<br>$s$ = Imaginary part $\Rightarrow \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ |

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y'' - y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2\left[e - \frac{1}{e}\right]$$

วิธีทำ

characteristic eq. $\Rightarrow \quad \lambda^2 - \cancel{\lambda}1 = 0$

$$(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

$$\lambda = 1, -1$$

ดังนั้น ผลเฉลย คือ $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

เมื่อ $x = 0, \; y = 0$

$$0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

เมื่อ $x = 1, \; y = 2\left[e - \frac{1}{e}\right]$

$$2\left[e - \frac{1}{e}\right] = c_1 e^{1} + c_2 e^{-1}$$

$$2\left[e - \frac{1}{e}\right] = c_1 e - c_1 \frac{1}{e}$$

$$2\left[e - \frac{1}{e}\right] = c_1 \left[e - \frac{1}{e}\right]$$

$$c_1 = 2$$

$$c_2 = -2$$

$$\boxed{y = 2e^{x} - 2e^{-x}}$$

*

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

<u>วิธีทำ</u>

characteristic eq.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

ผลเฉลย คือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 (x e^{\lambda x})$$

เมื่อ $x = 0$, $y = 1$

$$1 = c_1$$

เมื่อ $x = 0$, $y' = 0$

$$y' = c_1 \lambda e^{\lambda x} + c_2 \lambda x e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}(1)$$

$$0 = c_1 \times 2 e^{2(0)} + c_2 \times 2 \times 0 \, e^{2(0)} + c_2 e^{2(0)}$$

$$0 = 2c_1 + c_2 \quad ; \quad c_1 = 1$$

$$c_2 = -2$$

$$y = e^{2x} - 2x e^{2x} = [1 - 2x] e^{2x} \quad *$$

จงหาผลเฉลย ของสมการ

$$y'' + 4y = 0$$

<u>วิธีทำ</u>

characteristic eq.

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4 = 4 \times (-1)$$

$$\lambda = 2i, -2i$$

$$\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i$$

ผลเฉลย คือ

$$y = e^{rx}[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)] \; ; \; \begin{matrix} r = 0 \\ s = 2 \end{matrix}$$

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

- สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง
  - Linear
  - Non-Homogeneous
  - constant coefficient

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = r(x)$$

ผลเฉลยในรูปทั่วไปของสมการ

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

โดยที่ $a, b, c$ เป็นค่าคงที่

จะอยู่ในรูป

$$y = y_h + y_p$$

$y_h$ = ผลเฉลยของสมการ ⇒ Homogeneous)
⇒ $r(x) = 0$

$y_p$ = ผลเฉลยเฉพาะ ( Particular solution)

วิธีการหา $y_p$ คือ สมมติ $y_p$ ให้เหมาะสมกับ $r(x)$
แล้วใช้การเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ เพื่อหาค่าของ $y_p$

ตัวอย่าง การสมมติ $y_p$ ให้สอดคล้องกับ $r(x)$

| $r(x)$ | $y_p$ |
|---|---|
| $ae^{nx}$ | $Ae^{nx}$ |
| $a\cos(wx)+b\sin(wx)$ | $A\cos(wx) + B\sin(wx)$ |

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y'' + 4y = 2e^{3x}$$

วิธีทำ

ผลเฉลยในรูปทั่วไปคือ $y = y_h + y_p$

• หา $y_h$

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

• หา $y_p$

สมมติให้ $y_p$ สอดคล้องกับ $r(x) = 2e^{3x}$

$$y_p = Ae^{3x}$$

$$y_p' = 3Ae^{3x}$$

$$y_p'' = 9Ae^{3x}$$

นำ $y_p, y_p', y_p''$ แทนในสมการ $y'' + 4y = 2e^{3x}$

$$9Ae^{3x} + 4 \times Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

$$[9A + 4A]e^{3x} = 2e^{3x}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์หน้า $e^{3x}$

$$13A = 2$$

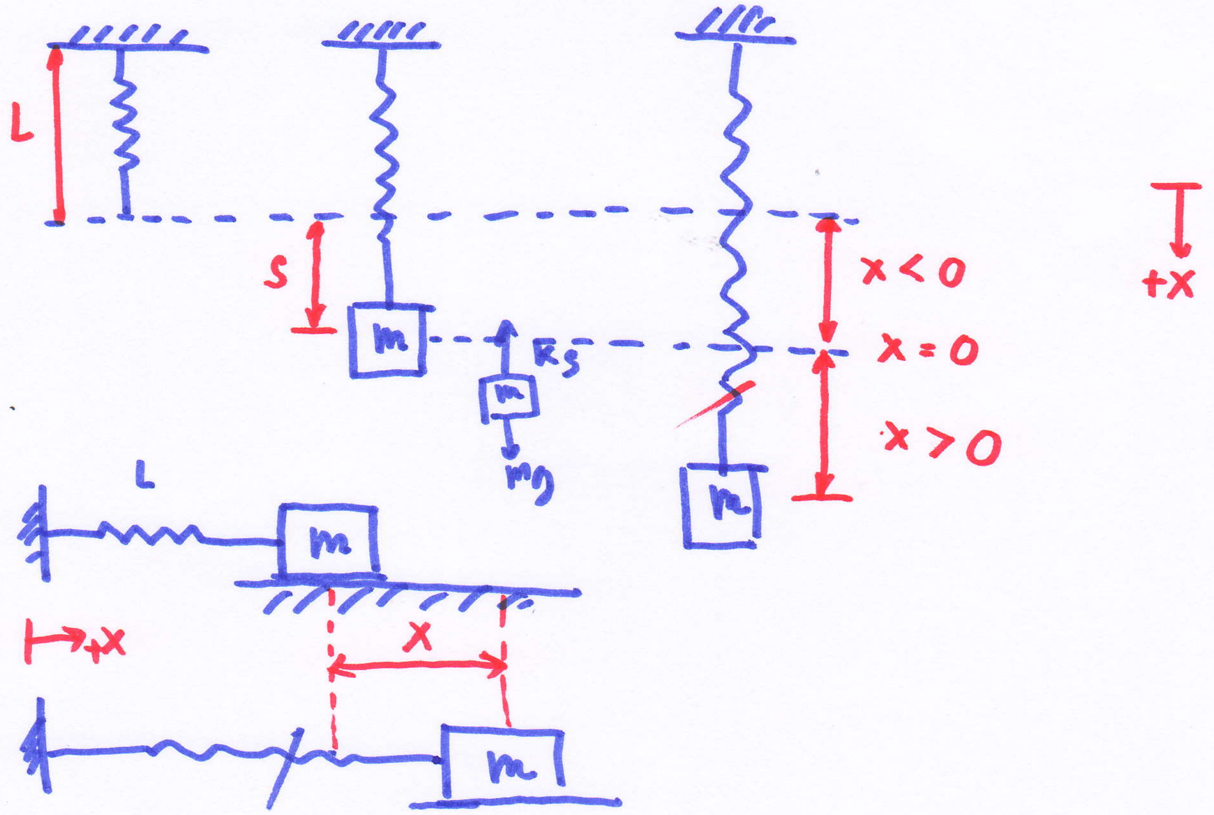
$$A = 2/13$$

$$y_p = \frac{2}{13} e^{3x}$$

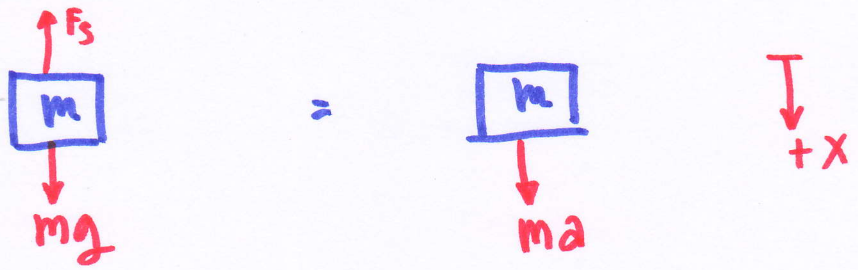
สรุปผลเฉลย คือ $y = y_h + y_p$

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{2}{13} e^{3x}$$ #

- สมการ ที่เกี่ยวข้องกับการสั่น




FBD $\quad \sum \vec{F} = m\vec{a}$




$$+\downarrow \quad \sum F_x = ma_x$$

$$-F_s + mg = ma$$

$$-K[x+s] + mg = ma \quad ; \quad mg = ks$$

$$-Kx \overbrace{-ks + mg}^{=0} = ma$$

$$ma + kx = 0 \quad ; \quad a = \ddot{x} = x''$$

$$mx'' + kx = 0$$

FBD

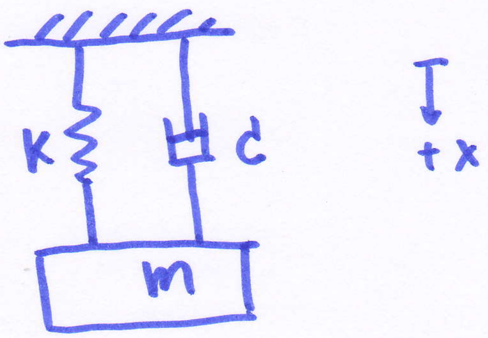

$\xrightarrow{+} \sum F_x = ma_x$

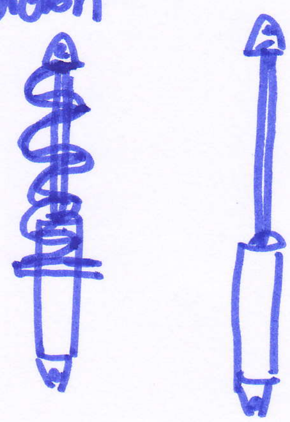
$-kx = ma$

$ma + kx = 0 \; ; \; a = x''$

$mx'' + kx = 0$ — Linear
— Homogeneous
— constant coef.

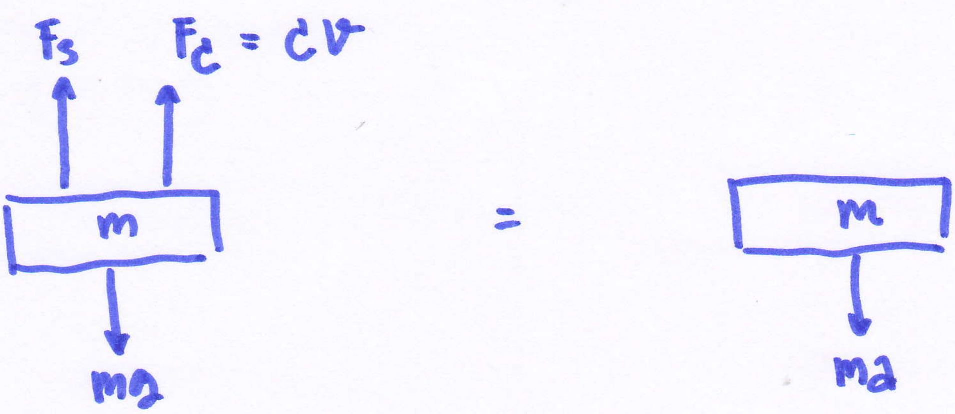
- กรณีที่มีแรงหน่วงเกิดขึ้นระหว่างการเคลื่อนที่



$c$ = ค่าคงที่ของแรงหน่วง

FBD




$mg = Ks$

$\sum F_x = ma_x$

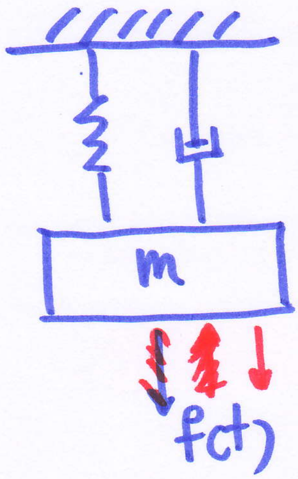
$-k[x+s] - cv + mg = ma$

$$ma + cv + kx = 0 \quad ; \quad x'' = a, \quad x' = v$$

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

— Linear
— Homogeneous
— constant coef.

- กรณีที่มีแรงภายนอกมากระทำกับสปริง




$$-k[x+s] + mg - cv + f(t) = ma$$

$$mx'' + cx' + kx = f(t)$$

→ Linear
→ Non-Homogeneous
→ constant coef.
ขึ้นอยู่กับค่า c, k